יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

תוכן העניינים

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\text{Re}(z)=-3$, $\text{Im}(z)=2$.

ב. $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו-$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_2=5-2i$, $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$

ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$

ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$

ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$

ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$

ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

ידוע כי z_1+z_2 הוא ממשי וכי z_1-z_2 הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$ ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\ ,\ -3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$ ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$

ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $z=2-3i\ ,\ w=5+i$.

21) א. $a=5\ ,\ b=-3$ ב. $a=2\ ,\ b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i\ ,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i\ ,\ 2-5i$.

25) $z_1=-2-5i\ ,\ z_2=3i$.

26) $z_1=-3i\ ,\ z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

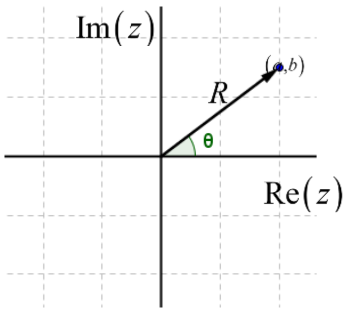
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $b = R\sin\theta$, $a = R\cos\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \dfrac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2cis60^\circ$ ב. $6cis135^\circ$ ג. $4cis330^\circ$

ד. $4cis(-30^\circ)$ ה. $4cis690^\circ$ ו. $8cis90^\circ$

ז. $3cis270^\circ$ ח. $cis180^\circ$ ט. $cis0^\circ$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. 4 ח. -1 ט. 1

י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2cis120^\circ \cdot 3cis60^\circ$ ב. $cis210^\circ \cdot 5cis(-40^\circ)$

ג. $\frac{12cis315^\circ}{3cis90^\circ}$ ד. $\frac{1}{2cis40^\circ}$

ה. $6cis30^\circ + 2cis210^\circ$

31) נתון המספר המרוכב $z = R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\bar{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z \cdot \bar{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\bar{z}$ ב. $z \cdot \bar{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\bar{z}^2$ ב. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\,\bar{z}=\overline{\bar{z}+iz}$

ב. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\bar{z}$

ב. $\frac{1}{z}$

ג. $\frac{z}{\bar{z}}$

ד. $z\cdot\bar{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, $1+i$.

36) $\sqrt{3}-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$.

37) -2 , $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

38) 2 , $-1+\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \,/\sqrt[n]{\;} \;\Rightarrow\; z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z-3i|=5$.

45) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70^\circ$ ג. 4- ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0=6\text{cis}60^\circ$, $z_1=6\text{cis}240^\circ$.
ב. $z_0=3\text{cis}40^\circ$, $z_1=3\text{cis}130^\circ$, $z_2=3\text{cis}220^\circ$, $z_3=3\text{cis}310^\circ$.
ג. $z_0=\text{cis}12^\circ$, $z_1=\text{cis}84^\circ$, $z_2=\text{cis}156^\circ$, $z_3=\text{cis}228^\circ$, $z_4=\text{cis}300^\circ$.

42) סכום: 0 , מכפלה: 1- .

43) $x^2+y^2=4$.

44) $x^2+(y-3)^2=25$.

45) $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10}=100-15i$.

47) א. $a_1=2+i\ ,\ q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

48) $2\ ,\ 2i\ ,\ -2$ או $2\ ,\ 4-2i\ ,\ 6-8i$.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\operatorname{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\operatorname{cis}\theta_1\cdot R_2\operatorname{cis}\theta_2=R_1R_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i\ ,\ z_2=-3-4i$.

50) $x=2\ ,\ -1$.

51) $z_1=0\ ,\ z_2=i\ ,\ z_3=-i\ ,\ z_4=1\ ,\ z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30^\circ$.

57) $z+iz=\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}$.

58) 2θ.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 2 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

סינוס מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $\sin(z)=2$.

2) הוכיחו כי $\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$.

3) פתרו את המשוואה $\sin(z)=5$.

תשובות סופיות:

1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$,

כאשר n מספר שלם.

2) הוכחה.

3) $z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.

2) פתרו את המשוואה $\cos(z)=2$.

3) האם $|\cos(z)|\le 1$ לכל z ?

4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z)+\frac{3}{4}i=0$.

5) הוכיחו כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)|\le\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ כאשר $y=\operatorname{Im}(z)$.

6) פתרו את המשוואה $\tan(z)=\frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $z_n=2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$

3) לא.

4) $z_k=-\frac{1}{2}+2k-i\frac{1}{\pi}\ln(2)$

5) הוכחה.

6) $z_k=\pi k+i\frac{1}{2}\ln(2)$

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $e^z=-1$.

2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\left|e^{ix}\right|=1$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי אם $\operatorname{Im}(z)\geq 0$ אז $\left|e^{iz}\right|\leq 1$.

ב. הראו כי $\left|e^{z}\right|=1$ אם ורק אם $\operatorname{Re}(z)=0$.

4) פתרו את המשוואה $e^z=1$.

5) פתרו את המשוואה $e^z=i$.

6) פתרו את המשוואה $e^z=1+i$.

7) האם הפונקציה $f(z)=e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

1) $z=i\cdot\pi[2n+1]$

2) $\sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=1$

3) א. $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}=\frac{1}{e^y}\leq\frac{1}{e^0}=1$ ב. הוכחה.

4) $k\in\mathbb{Z}$ $z_k=2\pi ik$

5) $k\in\mathbb{Z}$ $z_k=i\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)$

6) $k\in\mathbb{Z}$ $z_k=\frac{1}{2}\ln(2)+i\pi\left(2k+\frac{1}{4}\right)$

7) לא.

העתקות אלמנטריות:

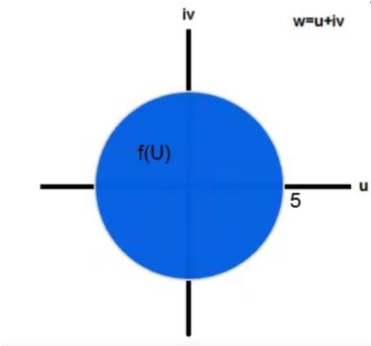
שאלות:

1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=z+1$.
2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=5z$.
3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,Arg(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=z^3$.
4) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.
5) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.
6) מהי תמונת התחום $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\infty<\mathrm{Re}(z)<0,0<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) $|w-1|<1$

2)



3) $\frac{3\pi}{4}\simeq 135°$

4) $0<\alpha<\pi$ $\quad 0<R<\infty$ $\quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

5) $0<\alpha<2\pi$ $\quad 0<R<\infty$ $\quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

6) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ $\quad 0<R<1$ $\quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

1) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Arg\left(1+i\right)$

ב. $Arg\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

2) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Log\left(1+i\right)$

ב. $Log\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

3) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$.

4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i.

5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}}$.

6) חשבו את הערך $\left(2+2i\right)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם.
כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

7) מצאו את תמונת התחום $A=\left\{z=re^{i\theta}\mid R_1<r<R_2\ ,\ -\pi<\theta<\pi\right\}$ תחת העתקה $Log\left(z\right)$ (הענף הראשי של הלוג).

8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ $a\neq b$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

9) הראו כי $\left|a^z\right|=a^{\operatorname{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C}\setminus\left(-\infty,0\right)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף ראשי של הלוג, כלומר: $a^z=e^{z\cdot Log(a)}$.

10) הוכיחו ישירות כי העתקה $\sqrt{z}$ איננה רציפה בתחום $\mathbb{C}$ אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z=re^{i\theta}$ | $\theta\in[0,2\pi]$.

11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy \ , \ x\ge 0 \ , \ y=\sin(x)\}$ ונניח שבענף זה מתקיים $\log(1)=0$,
חשבו בענף זה את הערכים: $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log(-i)$, $\log(i)$, $\log(-1)$.

13) נגדיר $\log_\alpha(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$ כאשר $\alpha-2\pi<\arg(z)\le\alpha$.
א. חשבו את הערכים: $\log_0(1)$, $\log_\pi(1)$, $\log_{2\pi}(1)$.
ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.
ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

14) יהיו z_n , ... , z_1 מספרים מרוכבים כך ש-$\mathrm{Re}(z_k)>0$ לכל $1\le k\le n$ וגם $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_k)$ לכל $1\le k\le n$.
הוכיחו כי $Log(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n)=Log(z_1)+\ldots+Log(z_n)$, כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

15) יהי $U=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ויהי $y>0$. חשבו את הגבול $\lim_{y\to 0}\left[\log(a+iy)-\log(a-iy)\right]$ עבור $a>0$ ועבור $a<0$.

16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב-$\mathbb{C}$. כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב-$\mathbb{C}$ כך ש-$h^2(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב-$|z|<1$ לכל $n\ge 2$.

18) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U. הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש-$f(z)-g(z)=2\pi ik$ לכל $z\in U$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{4}$ ב. $-\frac{\pi}{2}$

2) א. $\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}$ ב. $\ln(2)-\frac{\pi}{2}$

3) $e\frac{5\pi}{4}i\ ,\ k=1\ ;\ e\frac{\pi}{4}i\ ,\ k=0$

4) $\left\{e^{-\pi\frac{4k+1}{2}}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $\left\{2^{\frac{1}{9}}e^{-\frac{2\pi k}{50}}e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50}+\frac{2\pi k}{9}\right)}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) $\left\{e^{-5\cdot\frac{\pi}{4}}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ ..\right\}$

7) $\ln(r)+i\cdot\theta$

8) $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$

9) $a^{\mathrm{Re}(z)}$

10) הוכחה.

11) $\ln(\pi+2\pi k)+i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\quad m\in\mathbb{Z}\ ,\ k\geq 0$

$\ln(-\pi-2\pi k)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\quad m\in\mathbb{Z}$

12) $-\pi i\ ,\ -\frac{3\pi}{2}i\ ,\ -\frac{\pi}{2}i\ ,\ \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right)\ ,\ \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2\pi i$

13) א. $2\pi i\ ,\ 0\ ,\ 0$ ב. $\theta<r<\infty\ ,\ -\infty<\ln(r)<\infty\ ,\ \ln(r)+i\theta$

ג. $0<\theta\leq 2\pi\ ,\ -\infty<\ln(r)<\infty\ ,\ \ln(r)+i\theta$

14) הוכחה.

15) $2\pi i$

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 3 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

1) רשמו את הפונקציה $f(z)=z\cdot\operatorname{Re}(z)$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

2) רשמו את הפונקציה $f(z)=|z|^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

3) רשמו את הפונקציה $f(z)=2|z|^2+i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

4) רשמו את הפונקציה $f(z)=\dfrac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

5) רשמו את הפונקציה $f(z)=z^2+\bar{z}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy)=\dfrac{x^3}{3}+i\cdot\left(-\dfrac{y^3}{3}\right)$, בצורה $f(z)$, כאשר $z=x+iy$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=x^2+i\cdot xy$

2) $f(z)=x^2+y^2+i\cdot 0$

3) $f(z)=2\left[x^2+xy+y^2\right]+i\left(x^2-y^2\right)$

4) $f(z)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}+i\cdot\dfrac{y}{1+x^2+y^2}$

5) $f(z)=x^2+x-y^2+i\cdot(2xy-y)$

6) $f=\dfrac{2z^3+6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

1) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=?$

2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}=?$

3) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^2}}=?$

4) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^4}}=?$

תשובות סופיות:

1) $\frac{1-ik}{1+ik}$

2) $\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2}$

3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\bar{z}$ גזירה.
הראו עפ״י הגדרת הנגזרת כי $f(z)=\bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0\in\mathbb{C}$.

2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\mathrm{Re}(z)$ גזירה.

3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה.

4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

תשובות סופיות:

1) הפונקציה לא גזירה.
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
2) הפונקציה לא גזירה.
3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

1) הראו כי $f(z)=z^2+\mathrm{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z.

2) הראו כי $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z\neq 0$, אך כן גזירה בנקודה $z=0$ (לפי הגדרה).

3) מצאו מספרים ממשיים a,b כך שהפונקציה $f(z)=e^{ax}\cos(3y)+i\left(-e^{-3x}\sin(\mathrm{b}\,y)\right)$ תהיה גזירה בכל נקודה.

4) נתון כי $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$ אינה רציפה ב $z=0$.
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)
אם $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, גזירה ב- $z_0=x_0+iy_0$,
אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר: $\begin{matrix} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \end{matrix}$.

5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D, ונניח כי $\mathrm{Re}\{f(z)\}=0$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D.
נגדיר $g(z)=\overline{f(z)}$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D.

7) נתונה הפונקציה $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:
א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.
ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.
הוכיחו כי $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$.

9) הוכיחו כי $f(z) = e^{\operatorname{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

10) נתונה הפונקציה $f(z) = cx^2 - xy + ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

11) נתונה הפונקציה $f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \cdot \arctan(\frac{y}{x})$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

12) נתונה הפונקציה $f(z) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\left[\cos(xy) + i \cdot a\sin(xy)\right]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$,
ומקיימת $|g(z)| = 1 \quad \forall |z| \le 1$.
הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z) = e^{i \cdot h(x,y)}$.

14) נניח כי $R > 0$ ונתונה הפונקציה $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
נגדיר: $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$.
מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

1) $u'_y=-2y+1 \quad , \quad v'_x=2y$

2) $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

3) $a=-3 \quad , \quad b=3$

4) $x=0 \quad , \quad y=0$

5) הוכחה

6) הוכחה

7) א. הוכחה   ב. הוכחה

8) הוכחה

9) הוכחה

10) $c=a+i\cdot b=\frac{3}{2} \quad ,$ $\begin{matrix} y=0 \ , \ y=1 \ , \ y=0.5 \\ x=0 \ , \ x=1 \ , \ x=0.25 \\ z=0 \ , \ z=1+i \ , \ z=0.25+0.5\cdot i \end{matrix}$

11) $u_y=\frac{y}{x^2+y^2} \ ; \ u_x=\frac{x}{x^2+y^2}$.

12) $a=1$

13) הוכחה

14) $A=\{z \ | \ |z|>1\}$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

1) הראו כי הפונקציה x^3-3xy^2, היא פונקציה הרמונית בכל המישור.

2) הראו כי הפונקציה x^2-y^2, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו לה צמודה הרמונית.

3) הראו כי הפונקציה $f(z)=xy+i\left(x^2+y^2\right)$, היא פונקציה גזירה בראשית-
הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית.
האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?

4) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\sin(x)\cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x,y)$ המקיימת $v(0,0)=2$.
רמז: $f(z)=\sin(z)$.

5) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\cos(x)\sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו פונקציה הלומורפית כך שמתקיים $u(x,y)=\mathrm{Re}\{f\}$.

6) הראו כי הפונקציה $v(x,y)=e^y\sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור,
מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x,y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$,
כך שמתקיים: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

7) הראו כי הפונקציה $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$,
היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
רמז: $u(r,\theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2u_{rr}''+ru_r'+u_{\theta\theta}''=0$.

8) נתון כי $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

9) הוכיחו כי $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$, היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

10) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=u(x,y)^2-v(x,y)^2$ פונקציה הרמונית.

11) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=\sin\left[u(x,y)\right]\cdot\cosh\left[v(x,y)\right]$ פונקציה הרמונית.

12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x)\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 4 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

2) לכל $z\in\mathbb{C}$, המקיים $\operatorname{Re}(z)<0$, פתרו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{zt}dt$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

2) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \{z = 2e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$.

3) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \{z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi\}$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים,
העוברת בנקודות $\gamma : 0 \to 1 \to 1+i \to i \to 0$.

5) חשבון את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2 .

6) חשבון את אורך המסילה $\gamma(t) = \{(t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \ \mid \ 0 < t < 1\}$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \bar{z}\, dz$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 0 & n \ne -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

2) $2\pi i - 4$

3) 0

4) $4e^{\pi} - 4$

5) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

משפט קושי גורסט:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\int_{0}^{2+\frac{i\pi}{4}} e^{z}dz$.

2) הוכיחו כי $\int_{4}^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}}dz = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{8}) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{8})$.
כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

1) $\frac{e^{2}[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz$.

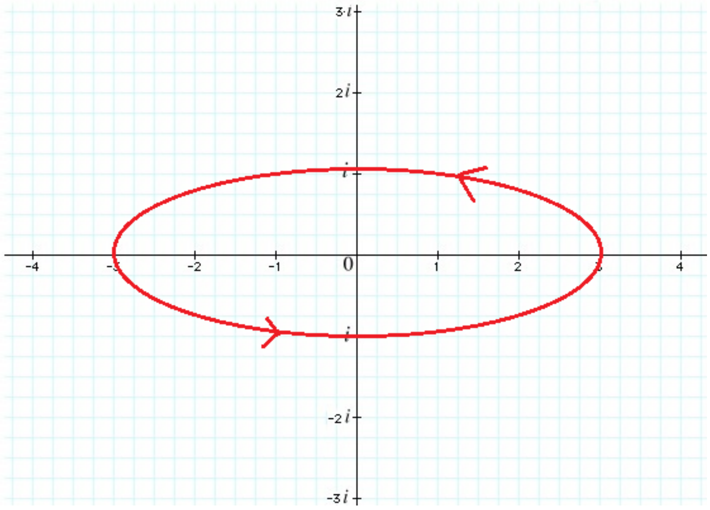
2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)} dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)} dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)} dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)} dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)}dz$.

8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D .
נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0,R)=\{|z-z_0|\le R\}$ מוכל כולו ב- D .
הוכיחו כי $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0+R\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$.

9) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin(2\theta)}d\theta$.

10) הוכיחו: $n\in\mathbb{N}$ $\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}(\theta)d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

11) חשבו את האינטגרל $\int\limits_C \frac{z}{z^2+1}dz$ כאשר $C=\{z\in\mathbb{C} \mid \ |z|=2\ ,\ \operatorname{Im}(z)\ge 0\}$.

12) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)}$ כאשר $a>b>0$.

13) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1}\frac{Log\left(1+\frac{z}{3}\right)}{z}dz$.

14) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $|z|<1$ כך ש- $u^2(0)=v^2(0)$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\int_0^{2\pi}u^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta$.

15) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $D=\{z\in\mathbb{C} \ \mid \ |z|<1\}$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ ולכל $0<|a|<r$ מתקיים
$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\operatorname{Re}(z)}{z-a}f(z)dz=\pi i\cdot\left(\left[a+\frac{r^2}{a}\right]f(a)-\frac{r^2}{a}\cdot f(0)\right).$$

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) $2\pi e^2 i$
3) $2\pi i\cdot\frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$
4) $2\pi i\cdot\frac{1}{3}$
5) $\pi i-2\pi e i$
6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$
7) $\pi i\cdot\left(\frac{17}{12}-\frac{3e}{4}\right)$
8) הוכחה.
9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
10) הוכחה.
11) πi
12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$
13) 0
14) הוכחה.
15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i\cdot\sin(\pi)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

אי-שיוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C:\{|z|=3 \ , \ \text{Re}(z)>0\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ עבור $b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ו- $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\sin(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

5) הוכיחו כי $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}d\theta=2\pi\cdot\frac{a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ עבור $a>b>0$.

6) תהי $f(z)=\frac{1}{(1+az)^2}+\frac{1}{(1+bz)^2}$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ קבועים המקיימים $|a|<1$, $|b|<1$ שונים מאפס. נניח כי $|f(z)|\le 3$ לכל $|z|=1$. הוכיחו כי $|a^n+b^n|\le\frac{3}{n+1}$ לכל $n\ge 0$.
רמז: התבוננו ב- $|f^{(n)}(0)|$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{11\pi}{20}$

5) הוכחה.

6) הוכחה.

פונקציות קדומות:

שאלות:

1) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

2) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n\geq 2)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

3) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$? האם יש לה קדומה שם?

4) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$? האם יש לה קדומה שם?

5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z(z^2-\pi^2)}$ יש קדומה בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|>\pi\}$.

6) נסמן $I=\int_\Gamma \frac{2z}{z^2+1}dz$ כאשר $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|=2\ ,\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרינד $\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ?

ב. חשבו את I.

7) נניח כי b , a מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר $\mathrm{Re}(b)<0\ ,\ \mathrm{Re}(a)<0$.
הוכיחו כי $|e^a-e^b|<|a-b|$, $(a\neq b)$.

8) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z)+g^2(z)=1$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך שמתקיים: $f(z)=\cos(h[z])$ ו- $g(z)=\sin(h[z])$.

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור γ המוכל בתחום Ω.
3) π
4) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום.
5) הוכחה.
6) א. לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום. ב. $2\pi i$
7) הוכחה.
8) הוכחה.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 5 - טורים

תוכן העניינים

טורים מספריים:

שאלות:

1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$.

2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(in)}{3^n}$.

3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+i^n}$.

5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+i^n}$.

תשובות סופיות:

1) מתבדר.
2) מתכנס.
3) מתבדר.
4) מתבדר.
5) מתכנס.

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

1) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

2) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$.

3) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(2n+1)}(z-3n)^n$.

תשובות סופיות:

1) $R=1$

2) $R=\infty$

3) $R=3$

טורים כלליים:

שאלות:

1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.

2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.

3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.

4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.

5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

1) $|z|>1$

2) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

4) $2<|z|<4$

5) $\mathrm{Re}(z)<0$

טורי לורן:

שאלות:

1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0=0$ בכל התחומים האפשריים $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<2$ ובתחום $|z|>2$.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-1$ בתחומים הבאים: $0<|z+1|<2$ ו- $|z+1|>2$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-3$ בכל התחומים האפשריים.

5) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $1<|z|<3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

6) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|>3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

7) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$.

8) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

9) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $0<|z-i|<2$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

10) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $|z-i|>2$.

11) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0=1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z=5$.

12) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

13) נניח כי $|a|<1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z)=\frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a|<|z|<\infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(n\theta)=\frac{a\cos(\theta)-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$.

14) תהי $a\in\mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$.

הוכיחו כי לכל $r>0$ מתקיים $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz$.

15) נסמן $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z)=\frac{z}{e^{z^2}-1}$ סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<r$.

א. מצאו מהו ה- r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n\le 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$

$f(z)=-\left(\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad |z|>1$

2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad |z|<2$

$f(z)=-\left(\frac{2}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n \qquad |z|>2$

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} \qquad 0<|z+1|<2$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \qquad |z+1|>2$

4) $f(z)=-\frac{1}{(z+3)}\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n \qquad 0<|z+3|<1$

$f(z)=\frac{1}{(z+3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^n} \qquad |z+3|>1$

5) $f(z)=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} \qquad 1<|z|<3$

6) $f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \qquad |z|>3$

7) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3^n}\right]z^n \qquad |z|<1$

8) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |z|<1$

$a_{-1}=0$

9) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1} \qquad 0<|z-i|<2$

$a_{-1}=\frac{1}{2i}$

10) $f(z)=\frac{1}{(2-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \qquad 2<|z-i|$

11) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \qquad |z-1|>3$

12) $|z|>3$ $\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$

13) א. $|a|<|z|<\infty$ $\qquad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$ $\qquad$ ב. הוכחה.

14) הוכחה.

15) א. $r=\sqrt{2\pi}$

ב. $a_n=0$ $\forall n\le -2$, $a_{-1}=1$, $a_0=0$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{12}$, $a_4=0$.

16) $\frac{\pi i}{12}$

17) $2\pi i$

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

1) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

2) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0\neq-(2+i)$ בתחום $|z-z_0|<|2+i+z_0|$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0\neq 1$ בתחום $|z-z_0|<|1-z_0|$.

5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.
חשבו את $\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z)}{f(z)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $z\in\mathbb{C}$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\sin(1)\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)$.

2) $|z-i|<1$ $f(z)=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^n(z-i)^n$.

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$.

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}}(z-z_0)^n$.

5) $2\pi i$.

מבחן ויירשטראס להתכנסות במידה שווה:

שאלות:

1) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<r\}$ כאשר $0<r<1$.

2) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$.

3) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2-1)^n}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\ge 2\}$.

4) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{z^n+1}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le r\}$ כאשר $0<r<1$.

5) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)\ge 2\}$,
(כאשר n^{-z} מוגדרת על ידי הענף הראשי של הלוג).

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 6 - נקודות סינגולריות

תוכן העניינים

אפסים של פונקציות אנליטיות:

שאלות:

1) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z)$ בנקודה $z=0$.

2) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z^3)$ בנקודה $z=0$.

3) נניח כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר n.
נניח כי הפונקציה $g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר m.
הוכיחו כי הפונקציה $h(z)=f(z)g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר $n+m$.

4) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=z^{20}\sin(z)$ בנקודה $z_0=0$.

5) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $f(z)=e^{\sin(z)}-\sin^2(z)-1$ בנקודה $z_0=0$.

6) נניח כי לפונקציה $f(z)$ יש אפס מסדר 7 בנקודה $z_0=0$.
נניח כי לפונקציה $g(z)$ יש אפס מסדר 3 בנקודה $z_0=0$.
מצאו את סדר האפס של הפונקציה $h(z)=f(z)+g(z)$.

7) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=6\sin(z^3)+z^{12}(z^6-6)$ בנקודה $z_0=0$.

8) הוכיחו כי לא קיימת $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

תשובות סופיות:

1) $N=2$
2) $N=2$
3) הוכחה.
4) $N=21$
5) $N=1$
6) $N=3$
7) $N=3$
8) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות:

שאלות:

1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-$z=0$?

3) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-z_0? חלקו למקרים $n\geq m$ ו-$n<m$.
א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^2}$.
ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$.

5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}$.

7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

9) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=e^{\frac{z}{z-2}}$.

10) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. האם הן מבודדות?

11) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cot(z)$.

12) נתון כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

נניח כי 0 זה קוטב מסדר m של $f(z)$ ובנוסף נניח כי $-1\notin f\left[\mathbb{C}\setminus\{0\}\right]$.

מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $g(z)=\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

13) מצאו את הקטבים והאפסים בתחום $|z|<4$ של הפונקציה $f(z)=\dfrac{(z-2)^2}{\left(e^{2z}-1\right)^2 z^3}$.

14) מיינו את הנקודות $z=0$ ו- $z=\frac{\pi}{4}$ עבור $f(z)=\dfrac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$.

15) תהיינה $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.

נניח כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\le|g(z)|$.

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי $f(z)=c\cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c|\le 1$.

16) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\dfrac{\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

17) הוכיחו כי הנקודה $z_0=i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)=\cos\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)$.

18) תהי $f(z):D\to\mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D=\left\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-z_0|<1\right\}$.

נניח כי מתקיים $|z-z_0|^a\,|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D$ עבור $0\le a<1$.

הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$.

19) (אתגר)

נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0<|z|<1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n!}$.

הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

20) (אתגר)

הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z)=e^{f(z)}$.

רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0)=r_0e^{i\alpha}$.

התבוננו בסדרות הבאות: $w_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$, $z_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\alpha}{m}}$.

תשובות סופיות:

1) $z=1$ קוטב מסדר 1.

2) $z=0$ קוטב מסדר 4.

3) אם $n\ge m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$.
ואם $n<m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$.

4) $z=0$ עיקרית.

5) $z=0$ עיקרית.

6) $z_k=2\pi ik$ קטבים מסדר 1.

7) $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ קטבים מסדר 1.

8) $z=-1$ עיקרית ו- $z=1$ קוטב מסדר 1.

9) $z=2$ עיקרית.

10) $z=0$ לא מבודדת ו- $z_k=\frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1.

11) $z=0$ סליקה ו- $z_k=\pi k\ne 0$ קטבים מסדר 1.

12) $z=0$ סליקה.

13) $z=2$ אפס מסדר 2, $z=0$ קוטב מסדר 5, $z=\pm\pi i$ קטבים מסדר 2.

14) $z=0$ סליקה, $z=\frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1.

15) א) הוכחה
ב) הוכחה

16) $z=0$ לא מבודדת.
$z_k=\frac{1}{k}$ $(k\ne 0,2,-2)$ קטבים מסדר 1.
$z=\pm\frac{1}{2}$ סליקות.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

19) הוכחה.

20) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות באינסוף:

שאלות:

1) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=\frac{z^2}{1+z}$.

2) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) ∞ זה קוטב מסדר 1 של $f(z)$.

2) ∞ זאת נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

משפט קסורטי – וייארשטרס:

שאלות:

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הנקודה $z_0 = i$ היא נקי' סינגולרית עיקרית של $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

ב. הסיקו כי קיים מספר $z \in \mathbb{C}$ כך ש- $\left|\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right) - 100\tan^2(z) + e^{-z^2} - 5i\right| < 1$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה.
ב. הוכחה.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 7 - משפט השארית

תוכן העניינים

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

1) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right)$

2) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right)$

3) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right)$

4) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right)$

5) נניח כי לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב פשוט ב- z_0 כאשר ונניח כי $g'(z_0)\neq 0$.

הוכיחו כי $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

6) $\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right)$

7) $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right)$

8) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$

9) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^3(z-\pi)}$.

10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק.
הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

1) 1

2) $\frac{1}{6i}$

3) $\frac{3}{8}$

4) $-\frac{3}{8}$

5) הוכחה.

6) 1

7) $\sin(1)$

8) $\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi}{2}+\pi k\right]=-\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}+\pi k\right]\left[\frac{\pi}{4}+\pi k\right]}$

9) $\operatorname{Res}\left[f(z),\pi\right]=\frac{2}{\pi^3}$ $\qquad$ $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{1}{2\pi}$

10) $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_k\right]=m_k$ כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$.

אינטגרלים מרוכבים :

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\oint\limits_{|z|=1} z\tan(\pi z)\,dz$

2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}\,dz$

3) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$

4) $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$

5) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)\,dz$

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה.

הוכיחו כי לכל מסלול C פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים $\oint\limits_C f\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=0$.

7) $\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,dz \qquad (a>1)$

8) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}\,dz$

9) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}\,dz$

10) $\oint\limits_{|z|=6} \cot(z)\,dz$

11) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)\, dz$

12) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים $f''(0)=7$.
חשבו $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)}\, dz$.

13) $\oint\limits_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z})\, dz$

14) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

15) חשבו את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של $f(z)=\frac{1}{\cos(z)-1}$
לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<2\pi$.
הערה: אם $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור לורן של $f(z)$ בתחום $R_1<|z-z_0|<R_2$ אז ניתן
לקבל את המקדמים ע״י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ כאשר $R_1<r<R_2$.

16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:
אם $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על השפה γ ואינה מתאפסת שם על השפה אזי $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N-P$ כאשר
N - מספר האפסים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.
P - מספר הקטבים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.

17) אם $n\in\mathbb{N}$ ו-$r>0$ כך ש-$n<r^2<n+1$ חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1} dz$.

18) חשבו $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz$.

הערה: $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz \overset{definition}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{iR}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz$ כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ- $-iR$ ל- iR .

תשובות סופיות:

1) $\oint_{|z|=1} z\tan(\pi z)dz=0$

2) $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^3(z+1)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$

3) $\oint_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$

4) $\oint_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz=-\frac{\pi i}{3}$

5) $\oint_{|z|=1}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)dz=0$

6) הוכחה.

7) $\oint_{|z-a|=a}\frac{z}{z^4-1}dz=\frac{\pi i}{2}$

8) $\oint_{|z|=1}\frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}dz=\frac{267}{20}\pi i$

9) $\oint_{|z|=5}\frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}dz=\pi\left[-3i\cdot e^i+2i-e\right]$

10) $\oint_{|z|=6}\cot(z)\,dz=6\pi i$

11) $\oint_{|z|=1}\sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)dz=0$

12) $\oint_{|z|=1}\frac{\sin(z)}{f(z)}dz=\frac{4\pi i}{7}$

13) $\oint\limits_{|z|=1} z^4 \sin\left(\bar{z}\right) dz = \frac{2\pi i}{5!}$

14) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0$

15) $a_{-1} = -2 \;\; , \;\; a_{-2} = -2 \;\; , \;\; a_n = 0 \;\; \text{for} \;\; n \le -3$

16) הוכחה.

17) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1} dz = 2n+1$

18) $\int\limits_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \frac{\pi i}{3e}$

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R=\{z=\mathrm{Re}^{i\theta}\,|\,0\le\theta\le\pi\}$$

$$\gamma=\{z=x\,|\,-R\le x\le R\}$$

1) חשבון את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבון את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{1+z^2}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz$

2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבון את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^4}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{1+z^4}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \pi\sqrt{2}$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \pi\sqrt{2}$

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1}dx$.

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}$

תשובות סופיות:

1) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2}dz = \pi$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

2) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

3) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = \pi\sqrt{2}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \frac{3\pi}{8}$

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1}dx = \frac{14\pi}{3}$

6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \frac{\pi}{4}$

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx = -\frac{\pi}{27}$

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \frac{\pi}{6}$

9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)} = \frac{5}{96}\pi$

מסילת מעגל היחידה:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta$

2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx$

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+b\sin(x)+c} dx$ עבור הפרמטרים הממשיים a,b,c המקיימים $c>\sqrt{a^2+b^2}=1$.

<u>הערה:</u> ניתן להשתמש בעובדה כי $\left|\sqrt{c^2-1}-c\right|<1$

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos\varphi)^2} d\varphi$ עבור $a>b>0$

5) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx$ עבור $|a|>1$

6) חשבו לכל $n\in\mathbb{N}$ את $\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta)^n \cos(n\theta) d\theta$

תשובות סופיות:

1) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

2) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

3) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+\mathrm{b}\sin(x)+\mathrm{c}} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}$$

4) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos\varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi ab}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}$$

6) $$\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta)^n \cos(n\theta)\, d\theta = 2\pi$$

הלמה של ז'ורדן:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בהלמה של ז׳ורדן:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx\right\}$

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{e}$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx$$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9}dx\right\}$

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)\cdot i$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^4+1}dx$$

4) $$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx$$

תשובות סופיות:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1} dx = 0$

4) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}(1-a)e^{-a}$

מסילת משולש פיצה:

שאלה:

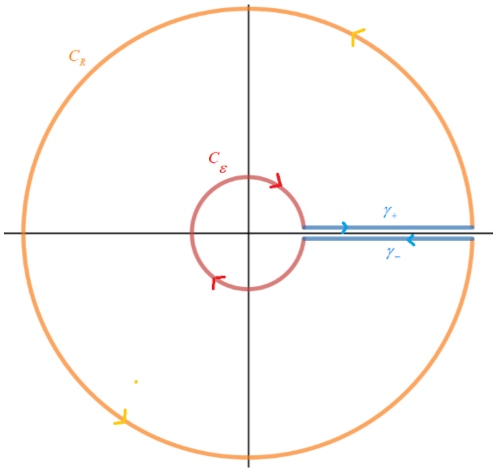
1) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2016}}dx=\frac{\pi}{2016}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)}$.

רמז: התבוננו בפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+x^{2016}}$ ובגזרת מעגל בזווית $\frac{2\pi}{2016}$.

תשובה סופית:

1) הוכחה.

מסילת חור מנעול:



שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\pi$.

הדרכה:

נגדיר את המסלולים (כאשר $R>1$ ו-$0<\varepsilon<1$).

$C_\varepsilon=\{z=\varepsilon e^{i\theta}\mid 0+<\theta<2\pi-\}$

$C_R=\{z=\mathrm{R}\,e^{i\theta}\mid 0+<\theta<2\pi-\}$

$\gamma_-=\{z=xe^{2\pi i}\mid x:R\to\varepsilon\}$

$\gamma_+=\{z=xe^{0\cdot i}\mid x:\varepsilon\to R\}$

א. הוכיחו כי $\oint\limits_{\gamma_++C_R+\gamma_-+C_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=2\pi$ כאשר $\sqrt{z}$ מוגדר בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=0$.

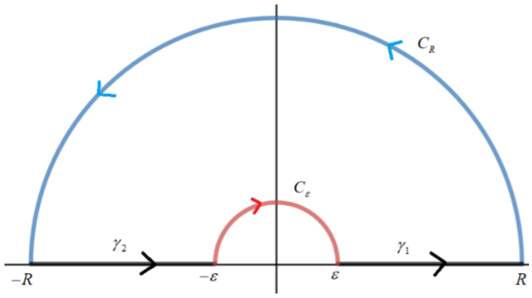
ג. הוכיחו כי $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=0$.

ד. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\pi$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

מסילת חצי מעגל מנוקב:



בתרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים :

$$\gamma_1=\{z=x\,|\,\varepsilon\le x\le R\}\qquad C_R=\{z=Re^{i\theta}\,|\,0\le\theta\le\pi\}$$

$$\gamma_2=\{z=x\,|\,-R\le x\le-\varepsilon\}\qquad C_\varepsilon=\{z=\varepsilon e^{i\theta}\,|\,\theta:\pi\to 0\}$$

$$\gamma=\gamma_1+C_R+\gamma_2+C_\varepsilon$$

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

הדרכה :

א. הוכיחו כי $\frac{\sin^2(x)}{x^2}=\text{Re}\left\{\frac{1-e^{i2x}}{2x^2}\right\}$.

ב. הגדירו $f(z)=\frac{1-e^{i2z}}{2z^2}$ והסבירו מדוע $\oint_\gamma f(z)dz=0$.

ג. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$ ו - $\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=-\pi$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

3) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^3+\pi^2x}dx$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$.

5) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2(x^2+\beta^2)}dx$ לכל $\alpha,\beta>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6}dx = \frac{88}{5\cdot 2^5}\pi$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3+\pi^2 x}dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{-\pi}}{\pi}$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \pi$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2(x^2+\beta^2)}dx = \frac{\pi}{\beta^2}\left(\alpha - \frac{1-e^{-\alpha\beta}}{\beta}\right)$

שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות:

שאלות:

1) נתונה $F(s)=\dfrac{p(s)}{q(s)}$ מנת פולינומים כאשר $\deg(q)\geq\deg(p)+1$.

הוכיחו כי $L^{-1}\{F(s)\}=\dfrac{1}{2\pi i}\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}e^{st}F(s)ds=\sum\limits_{k=1}^{n}\text{Res}\left[e^{st}F(s),s_k\right]$

כאשר s_k אלו הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $F(s)$ והקו $\text{Re}(s)=\sigma$ נמצא מצד ימין לכל הנקודות הסינגולריות.

2) חשבו התמרת לפלס הפוכה של $F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+2s+5\right)^2}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(t)=\dfrac{e^{-t}}{16}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)$.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 8 - טורי פורייה

תוכן העניינים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $$x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$$

2) $$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$$

3) $$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$$

4) $$f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$$

5) $$f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le\pi \\ x+\pi & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=x$.
מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x\le\pi \\ 0 & -\pi<x\le 0 \end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le\pi \\ e^{x^2} & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases} 0 & 1<x\le\pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1 \\ 0 & -\pi\le x<0 \end{cases}$.
נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$, $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$.
הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad , \quad -\pi\le x<\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון.

ב. $\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx}$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבו $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{x}\frac{se^{s^2}ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0
2) 0
3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L_{PC}^2[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$ ג. הוכחה.

3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).
נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.
נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.
כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,...k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n^k c_n\right)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\le\int_{0}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin\left(n^{2.5}x\right)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.
א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.
ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.
א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.
ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).
ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.
א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.
ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.
ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.
ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $\quad x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$

2) א. $a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & else \end{cases} \quad , \quad b_n = 0$

ב. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}$

3) א. $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2} e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi [2k-1] x)$

5) $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi [2k-1] x}{2}\right)$

6) א. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ ו- f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ״ש ל- f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi (2k-1)}{3} x\right)$

8) $\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x)$

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x} g(t)dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה

ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L_{PC}^{2}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.
הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $g(x)=\cos(x)$, $f(x)=x^2$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$, $f(x)=x$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $\left(f*g\right)_{(x)} = -2\cos\left(x\right)$

5)
$$\left(f*g\right)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2-\left(x-1\right)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2-\left(x+\left(2\pi-1\right)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi\le t\le\pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\frac{1}{\alpha}-\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}$.

ג. הראו שמתקיים $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{[\alpha-n]^2}$.

ד. הראו שמתקיים $\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)\frac{\pi}{4\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\ldots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_n e^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$
בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.
מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.
האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.
נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.
מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם.

ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$ - אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 9 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה
כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.
מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.
רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.
רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $\dfrac{\sin(\omega\cdot r)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\dfrac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

3) $f(x)=\dfrac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$

4) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$

5) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2 \\ 0 & else\end{cases}$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $\dfrac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}(i\omega)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=F\left\{\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_{\omega}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2 e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\dfrac{1}{1+x^2}\right\}=\dfrac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{i\cdot\dfrac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\dfrac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$$

2) הוכחה.

3) $$f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים, היינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.

ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.

ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $$F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+2]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-2]^2\right)}$$

5) $$g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+6]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-6]^2\right)}\right]$$

6) $$g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$$

7) $$F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+[x+3]^2}\right\}$$

8) א. $\dfrac{1}{2\pi(a+i\omega)}$

ב. $\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a+i[\omega-b]}+\dfrac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

ג. $\dfrac{1}{4\pi i}\left(\dfrac{1}{a+i[\omega-b]}+\dfrac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases} x & x\in(-1,1) \\ 0 & else \end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-x^2}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^5} & x\geq 1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$.

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\dfrac{i}{\pi}\dfrac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f(\omega)=\dfrac{1}{256}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2) $$\begin{cases} 0 & |x|>1 \\ 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & x=1\,,\ x=-1 \end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבון התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבון את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x>0$ ו- $x\le 0$.

3) מצאו פונקציה $f\in G$ כך ש- $f(\omega)=\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt<\infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t)\in E$ מתקיים השיוויון.

$\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)-f''(t)\right)g(x-t)dt=2f(x)$.

5) נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$, $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תזכורת: $\frac{1}{2a}e^{-a|\omega|}=F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}f(t)dt=e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה : תוכלו להיעזר בעובדה $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

2) $$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

4) $g(x) = e^{-|x|}$

5) $\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2+9}$

6) א. $\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $f(x) = e^{-|x|}$

7) א. $$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
ב. הוכחה.

8) $$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^\infty h'(y)e^{-|x-y|}dy=x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A \\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש- $f'(x),x\cdot f'(x),f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases} 2 & |x|\le 1 \\ 4 & 1\le |x|\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le \pi \\ 0 & else \end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים : $\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2 dx$

ו- $\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורותונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{(1+\omega^2)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{(x^2+a^2)^2}$.

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

תזכורת: $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)(x^2+b^2)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-(x^2+2x+5)}$.

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}$, $-h(y)=e^{-|y|}$

3)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה. ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$ ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 10 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 11 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 12 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 13 - משוואת החום

תוכן העניינים

יסודות מתמטיים של אותות ומערכות

פרק 14 - משוואת לפלס

תוכן העניינים